Déterminant de Gram et inégalité de Hadamard

Soient $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace pré-hilbertien (réel ou complexe) et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. On appelle matrice de Gram de $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la matrice $M_G(x_1,\dots,x_n) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice, noté $G(x_1,\dots,x_n)$.

Lemme 1. *Le déterminant de Gram d'une famille de vecteurs est nul si, et seulement si, elle est liée.*

Démonstration.

Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E. Si $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est liée, son déterminant de Gram est nul, par linéarité du produit scalaire. Réciproquement, si le déterminant de Gram de $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est nul, les vecteurs colonnes des produits scalaires sont liés, donc il existe $k \in [\![1,n]\!]$ et $(\lambda_\ell)_{\ell\neq k}$ des coefficients non tous nuls tels que :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \langle e_i, e_k\rangle = \sum_{\ell\neq k} \lambda_\ell \langle e_i, e_\ell\rangle = \left\langle e_i, \sum_{\ell\neq k} \overline{\lambda_\ell} e_\ell \right\rangle \quad \Rightarrow \quad e_k - \sum_{\ell\neq k} \overline{\lambda_\ell} e_\ell \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp$$

Or $e_k - \sum_{\ell\neq k} \overline{\lambda_\ell} e_\ell \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$, donc $e_k = \sum_{\ell\neq k} \overline{\lambda_\ell} e_\ell$, et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est liée. □

Théorème 2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$ muni d'une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Alors, pour tout $x \in E$, on a :*

$$d(x,F)^2 = \frac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)}$$

Démonstration.

Comme F est de dimension finie, $d(x,F)$ est atteint en la projection $f \in F$ de x.
On a ainsi $d(x,F) = \|x - f\|$, et, par définition de f :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \langle x, e_i\rangle = \langle f, e_i\rangle \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \|f\|^2 + \|x-f\|^2$$

Calculons la matrice de Gram de $(e_1,\dots,e_n,x)$:

$$M_G(e_1,\dots,e_n,x) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \langle e_1, x\rangle \\ & M_G(e_1,\dots,e_n) & & \vdots \\ & & & \langle e_n, x\rangle \\ \hline \langle x, e_1\rangle & \cdots & \langle x, e_n\rangle & \|x\|^2 \end{array}\right)$$

On peut alors calculer le déterminant de Gram G de $(e_1,\dots,e_n,x)$:

$$G = \left|\begin{array}{ccc|c} & & & \langle e_1, f\rangle \\ & M_G(e_1,\dots,e_n) & & \vdots \\ & & & \langle e_n, f\rangle \\ \hline \langle f, e_1\rangle & \cdots & \langle f, e_n\rangle & \|f\|^2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & M_G(e_1,\dots,e_n) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \langle f, e_1\rangle & \cdots & \langle f, e_n\rangle & \|x-f\|^2 \end{array}\right|$$

$$= G(e_1,\dots,e_n,f) + \|x-f\|^2 G(e_1,\dots,e_n) = d(x,F)^2 G(e_1,\dots,e_n)$$

Comme la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est libre, son déterminant de Gram est non nul, et on a bien :

$$d(x,F)^2 = \frac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)}$$

□

Théorème 3 (Hadamard). *(i) Soient* $x_1, \ldots, x_n \in E$*. Alors* $G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2$.
(ii) Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$*. Alors* $|\det(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|_2$.
Dans les deux cas, on a égalité si, et seulement si, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *est orthogonale ou l'un des vecteurs est nul.*

Démonstration.

(i) Si la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée, alors $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$, et l'inégalité sont évidentes.
On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ qu'une famille de n vecteurs libres de E vérifie l'inégalité, avec égalité si, et seulement si, ils sont orthogonaux.

Si $n = 1$, on a $G(x_1) = \|x_1\|^2$. Supposons la propriété vraie au rang n. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des vecteurs libres de E. Notons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$, et considérons f la projection orthogonale de x_{n+1} sur F. En remarquant que $\|x_{n+1} - f\|^2 \leqslant \|x_{n+1} - f\|^2 + \|f\|^2 = \|x_{n+1}\|^2$, on obtient par hypothèse de récurrence :

$$G(x_1, \ldots, x_{n+1}) = G(x_1, \ldots, x_n)\,\|x_{n+1} - f\|^2 \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2 \times \|x_{n+1} - f\|^2 \leqslant \prod_{i=1}^n \|x_i\|^2 \times \|x_{n+1}\|^2$$

La première inégalité est une égalité si, et seulement si, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est orthogonale. De plus, la deuxième inégalité est une égalité si, et seulement si, $\|x_{n+1} - f\|^2 = \|x_{n+1}\|^2$, c'est-à-dire $\|f\|^2 = 0$ donc x_{n+1} est orthogonal aux $(x_1, \ldots, x_n)$. On a donc montré l'hypothèse de récurrence au rang $n+1$, d'où le résultat par récurrence.

(ii) Notons que $M_G(x_1, \ldots, x_n) = N^\star N$, où N est la matrice de vecteurs colonnes des $(x_1, \ldots, x_n)$. On applique alors le point précédent avec $G(x_1, \ldots, x_n) = |\det N|^2$.

□

Références

[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e édition